

Die Rientstehung in Glasscheiben unter Eigenspannungen

Von M. HIEKE

(Z. Naturforsch. 15 a, 543–546 [1960]; eingegangen am 3. Februar 1960)

Gestützt auf frühere analytische Ergebnisse wird die Richtigkeit der von A. SMEKAL entwickelten Theorie für die Rißbildung in spröden Körpern auch für das Anreißen von Scheibenkrpern nachgewiesen, die unter definierbaren Eigenspannungen stehen.

In einigen früheren Arbeiten sind definierte Eigenspannungsfelder im unendlich langen Kreiszyylinder untersucht worden. Als Ursache der Selbstspannungen wurde eine unstetige Temperaturverteilungsfunktion vorgegeben. Diese war so festgesetzt, daß der Zylinderkörper in einem Teil seines durch eine achsenparallele Ebene geteilten Volumens auf der Temperatur $T = T_0$, im anderen Teilvolumen auf der Temperatur $T = 0$ gehalten wurde. Das elastische Kontinuum wurde als isotrop vorausgesetzt und es wurden in ihm trotz seiner ungleichförmigen Erwärmung durchgehend dieselben Konstanten definiert. Dann konnte das Temperaturspannungsproblem als ein ebener Verzerrungszustand behandelt werden, dessen Eigenspannungsquellen reine Volumdehnungen sind. Zu seiner Formulierung wurde ein ebenes Polarkoordinatensystem $\{0, r, \alpha\}$ eingeführt (Abb. 1). Als Ergebnis der Rechnung ergab sich eine AIRYSche Spannungsflche, deren analytischer Ausdruck in der Arbeit¹ zu finden ist. Diese Funktion hängt vom

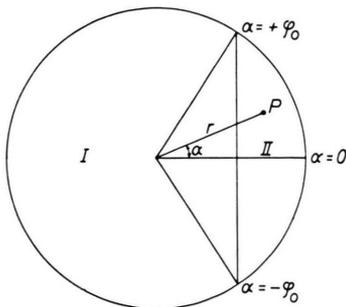


Abb. 1. Lage des Polarkoordinatensystems im Zylinderquerschnitt.

Öffnungswinkel $2\varphi_0$ ab, unter dem die Länge AB der Sehne vom Koordinatenursprung erscheint. Das aus dieser AIRYSchen Fläche abgeleitete Spannungstensorfeld wird durch sehr umfangreiche Ausdrücke beschrieben. Man erhält einen Eindruck von seiner schwerfälligen Bauart am Beispiel des zur AIRYSchen Funktion mit dem Öffnungswinkel $2\varphi_0 = \pi$ gehörigen Spannungssystems, das man in der Arbeit² abgedruckt findet. Dabei hat

¹ M. HIEKE, Z. angew. Math. Mech. 35, 54 [1955].

² M. HIEKE, Z. angew. Math. Mech. 34, 121 [1954].

dieses spezielle Tensorfeld noch die relativ einfachste Gestalt, da es bezüglich seiner geometrischen Verhältnisse den symmetrischen Fall beschreibt.

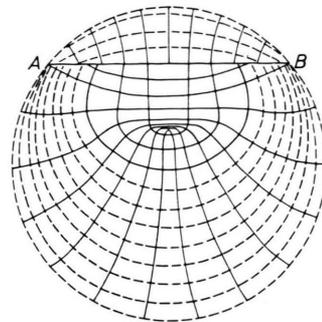


Abb. 2. Theoretisch ermitteltes Hauptlinienbild im Fall $2\varphi_0 = 101^\circ$.

Zu diesem Tensorfeld wurde das Hauptlinienbild konstruiert. Dabei erlaubte der komplizierte Bau der Formeln nur dessen näherungsweise Berechnung, die graphisch erfolgt ist. Um einen Eindruck von den Ergebnissen zu vermitteln, ist in Abb. 2 eine zur AIRYSchen Fläche mit dem Öffnungswinkel $2\varphi_0 = 101^\circ$ gehörende Näherung des Hauptlinienfeldes abgebildet. Man hat sich dabei den vom kleinen Segment gebildeten Teil des Zylindervolumens auf der Temperatur $T = T_0$ erwärmt und den übrigen Teil auf der Temperatur $T = 0$ befindlich zu denken. Das gezeigte Feld wurde dadurch erhalten, daß mit den aus der Rechnung bekannten Ausdrücken die Spannungen σ_r , σ_α und $\tau_{r\alpha}$ in den Punkten eines ebenen Netzes numerisch berechnet wurden, die in regelmäßigen Winkelabständen von je zehn Grad bei dekadischer Unterteilung des Radienverhltnisses r/r_0 angeordnet sind. Dann wurden in den Punkten dieses Netzes die Richtungen der Hauptlinien angetragen. Die multiplikative Konstante konnte ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich eins gesetzt werden. Die so erreichte Güte der Approximation ist für das Folgende ausreichend. ber die Größe der relativen Fehler in der vorläufigen Approximation wird später eine Bemerkung eingeschoben.

Es ging darum, die Resultate der spannungsoptischen Untersuchungen an Kreisscheiben endlicher Höhe zu



verstehen. Die analytische Betrachtung soll also dem Verständnis der Meßresultate an einem gegebenen Problem dienen, dessen physikalische Voraussetzungen von den Annahmen der Rechnung abweichen.

Die betrachtete Scheibe wurde aus zwei Teilen gleicher Höhe, die aus verschiedenem, in sich aber homogenem Material hergestellt waren, zusammengesetzt. Die Querschnitte der verwendeten Teilscheiben wurden von Kreissegmenten gebildet, die längs ihrer Sehnen aneinandergesetzt einen Vollkreisquerschnitt vom Radius $r=r_0$ ergaben. An ihren durch die Sehnen bestimmten ebenen Seitenflächen wurden die Segmente miteinander verklebt.

Es wurden zwei Segmentscheiben aus den beiden Gläsern BK 7 und ZK 5 der Schottwerke in Jena verbunden, die von der Herstellerfirma aus vorhandenen Strichplatten herausgeschliffen waren. Als Verbindungsmittel wurde ein Gemisch von Blaugrund und Glasur so dünn wie möglich auf die ebenen Flächen beider Segmente aufgetragen, und das Ganze nach Zusammenlegen auf eine Temperatur von 580° erwärmt und danach im Ofen innerhalb zwölf Stunden auf Zimmertemperatur abgekühlt. Die fertigen Kreisscheiben haben einen Durchmesser von 33 mm und eine Dicke von 3 mm.

So wurde aus zwei Segmenten eine Kreisscheibe zusammengesetzt, die nach Erreichen der Zimmertemperatur ein Eigenspannungsfeld hat, dessen Quelle das eingefrorene diskontinuierliche Verschiebungsvektorfeld zu beiden Seiten der Kittschicht ist. Dabei wird man den Einfluß der Kittschicht auf das Feld der Eigenspannungen umso geringer veranschlagen dürfen, je geringer die Masse des Kittes und je besser die Klebung erfolgt ist. Eine so gebaute Kreisscheibe weicht in vielen ihrer Eigenschaften vom Verhalten eines unendlich langen Kreiszyinders einheitlichen, aber ungleichförmig erwärmten Materials ab.

Während für den unendlich langen Zylinder die Annahme eines ebenen Verzerrungszustandes möglich ist, ist der Eigenspannungszustand der Scheibe ein räumlicher, der besonders in der Nähe der Verbindungsschicht vom Spannungsfeld eines ebenen Verzerrungszustandes abweichen wird. Ein zweiter Unterschied besteht in der Verschiedenheit der Materialien beiderseits der Verbindungsschicht der zwei Segmente. Die Auswahl der Gläser konnte nicht so getroffen werden, daß sie bei verschiedenen thermischen Ausdehnungen gleiche elastische Konstanten hatten. Dazu treten erschwerend die vom elastischen Verhalten der Segmente abweichenden elastischen Eigenschaften der endlichen Kittschicht hinzu.

Die Erwärmung der Gläser über den Transformationspunkt gestattete nicht einmal die Festlegung der Werte der Wärmedehnungen und damit ihrer gegenseitigen Verschiebung. Desgleichen war die Bestimmung der elastischen Größen, sowie der spannungsoptischen Kon-

stanten nach der Temperatureinwirkung, also in der fertigen Scheibe, unmöglich. Dieser Übelstand hat aber auf die Lage des gesuchten Hauptlinienbildes keinen Einfluß, da diese Größen multiplikativ in die Spannungsfunktion eingehen.

Für diese Scheibe wurde das Hauptlinienbild durch Aufnahme der Isoklinen spannungsoptisch ermittelt. Die Isoklinen wurden in Abständen von fünf Winkelgraden durch Drehung des Polarisationskreuzes bestimmt. Aus ihrer Gesamtheit wurden die Hauptlinien gefunden. Ein präziser Vergleich der experimentell gemessenen mit den analytisch ermittelten Isoklinen ist vorläufig mit an der zu grob bemessenen Maschenweite gescheitert.

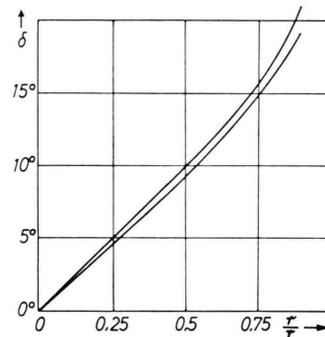


Abb. 3. Einlaufswinkel der Isoklinen in die Trennlinie im Fall $2\varphi_0=180^\circ$.

Obere Kurve: Theoretisch ermittelte Einlaufswinkel.
Untere Kurve: Experimentell ermittelte Einlaufswinkel.

Die relativen Abweichungen beider Hauptlinienbilder sollen durch Abb. 3 für den Sonderfall des Öffnungswinkels $2\varphi_0=\pi$ veranschaulicht werden. Dieses Bild gibt die Abweichungen der Winkel wieder, unter denen die Hauptlinien die Sehne schneiden. Die Übereinstimmung kann als befriedigend und die Anwendung der analytischen Resultate auf die Beurteilung der experimentellen Ergebnisse als gerechtfertigt betrachtet werden. Im übrigen muß die auf einer engeren Einteilung des Koordinatennetzes beruhende Neuberechnung des Hauptlinienfeldes für den unendlich langen Kreiszyinder abgewartet werden. Es wird schwierig sein, die experimentellen Methoden zu verbessern, da sich die Scheiben auch nach Herausnahme aus dem Ofen bleibend verformen. Das Isoklinenbild der Scheiben verschiebt sich nach Erreichen der Zimmertemperatur asymmetrisch. Dadurch wurden die bisherigen Beobachtungswerte verfälscht. Zur Steigerung der Genauigkeit ist eine Bestimmung der Zeitkonstanten dieser Auswanderung abzuwarten.

Um die Untersuchungen, die mit zeitraubenden numerischen Rechnungen einhergehen, mit möglichst geringem Aufwand zum Erfolg zu bringen, wurde vorläufig die Anzahl der gebauten Scheiben unter konsequenter Beibehaltung der beiden Glassorten BK 7 und ZK 5 auf

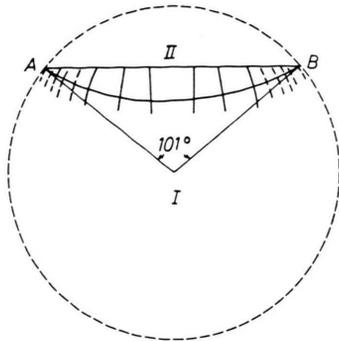


Abb. 4 a. Die durch die Punkte A und B orthogonal zum Randkreis stehende Hauptlinie im Fall $2\varphi_0=101^\circ$.

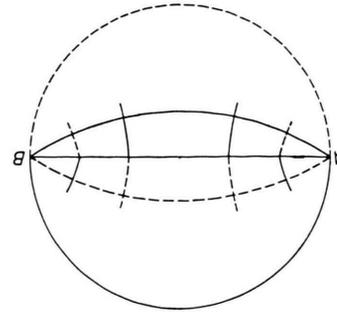


Abb. 4 c. Die durch die Punkte A und B gehenden Hauptlinien im Fall $2\varphi_0=180^\circ$.

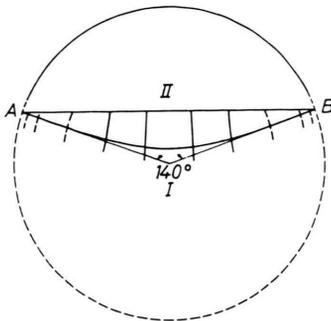


Abb. 4 b. Die durch die Punkte A und B orthogonal zum Randkreis stehende Hauptlinie im Fall $2\varphi_0=140^\circ$.

beschränkt (Abb. 4). Dabei ist das mit I bezeichnete, im allgemeinen größere Segment der Scheibe aus dem Schottischen Glas ZK 5 und das mit II bezeichnete aus

drei geometrisch verschiedenen Ausführungsformen mit den Öffnungswinkeln

$$2\varphi_0=101^\circ, \quad 2\varphi_0=140^\circ, \quad 2\varphi_0=180^\circ$$

dem Schottischen Glas BK 7 hergestellt. Für die folgende Erwägung ist lediglich eine bestimmte Hauptlinie des Feldes von Bedeutung. Diese ist für die beiden ersten Sonderfälle in den Abb. 4 a und 4 b dargestellt. Es handelt sich jeweils um diejenige Hauptlinie, die orthogonal zum Randkreis in den Endpunkten A und B der Sehne einläuft. Durchgezogene Linien der Hauptlinienfelder bedeuten Zugspannungslinien, durchbrochen gezeichnete Druckspannungslinien. Zur Belebung der Bilder wurden jeweils noch einige orthogonale Trajektorien angedeutet. In der Umgebung der Randpunkte A und B lassen sich die tangentialen Randspannungen für kleine Abstände als Funktionen des Logarithmus ihrer Entfernung von diesen Punkten darstellen.

$$(\sigma_a)_{r=r_0} = \frac{M}{2\pi} \left[(\cos^2 \alpha - \cos^2 \varphi_0) \cot \frac{\alpha - \varphi}{2} - \cos 2\alpha \left\{ \sin(\alpha - \varphi) - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\cot \frac{\alpha - \varphi}{2} \right) \right\} - \sin 2\alpha \left\{ 2 \ln \left(\sin \frac{\alpha - \varphi}{2} \right) + 1 - \cos(\alpha - \varphi) \right\} \right] \Big|_{\varphi = -\varphi_0}^{\varphi = +\varphi_0}$$

Der Wert für die tangentielle Randspannung geht mit verschwindender Entfernung von den Punkten A und B nach Unendlich.

Als Druckspannungen, die durch die endliche Dicke der Verbindungsschicht in ihrem Betrage herabgesetzt angenommen werden können, führen sie eine Zerstörung der Scheibe nicht herbei. Sie bewirken aber ein Fließen des Materials, das besonders stark in der Umgebung der Randpunkte A oder B geltend wird. In allen Fällen mit Öffnungswinkeln $2\varphi_0 \neq \pi$ gibt es nur eine Hauptspannungslinie durch die Endpunkte A und B der Sehne.

Vertauscht man in diesen Scheiben unter Beibehaltung ihrer geometrischen Einteilung die Materialien untereinander, so gewinnt man Scheiben, die zerreißen; denn aus den früheren Druckspannungen sind Zugspannungen geworden und umgekehrt. Der Riß beginnt plötzlich an

einer der Randstellen A oder B. Der Verlauf des Anrisses erweckt den Anschein, als decke er sich jeweils mit der einlaufenden Hauptlinie. Die Scheibe bildet nach eingetretenem Bruch noch ein Ganzes, ohne daß Teile abgeschleudert werden. Die Versuche ergaben in allen Fällen der beschriebenen Kombinationen immer wieder das gleiche Bruchbild mit fast deckungsgleichem Verlauf (Abb. 5). Die Größen der Anrißwinkel bestätigen durchgehend die von SMEKAL³ entwickelte Auffassung über die Festigkeit spröder Körper, wonach der Riß senkrecht zur Hauptzugspannungsrichtung zu erfolgen hat.

Die Ausdrücke für die tangentielle Randspannung werden längs der durch die Punkte A und B projizierten Mantellinie des Zylinders unendlich. Diese Singularitäten reichen zur Deutung der Ursache des Bruchbeginns aus. Der Anriß hat ein muscheliges Aussehen zufolge

des dreidimensionalen Spannungszustandes in der Umgebung der Anrißpunkte. Die weitere Ausbildung der Bruchfläche erfolgt dann langsam und so, daß die neu entstehenden freien Oberflächen fast abwickelbaren Flächen gleichen. Soweit sich die Verhältnisse experimentell verfolgen lassen, wird ein Anriß bei solchen Anordnungen nicht mehr erfolgen, bei denen der Einfluß der endlichen Dicke der Kittschicht auf den Verzerrungszustand nicht mehr zu vernachlässigen ist.

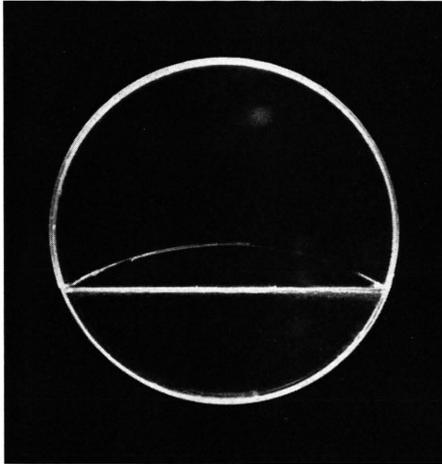


Abb. 5. Mehrere übereinandergelegte gerissene Modelle im Fall $2\varphi_0=140^\circ$.

Eine Sonderstellung nimmt der Fall zweier miteinander verbundener Halbkreise ein. Hierbei erfolgt, obzwar nicht sofort nach Herausnahme aus dem Ofen, in jedem Falle ein Riß. Die Entstehung des Risses ist gar nicht einfach einzusehen; denn die tangentielle Randspannung geht in den Punkten A und B diskontinuierlich durch den Wert Null, indem sie von einem bestimmten endlichen Wert auf den entgegengesetzt gleichen springt. Die Endpunkte A und B sind zugleich isotrope Punkte des Spannungsfeldes des ebenen Verzerrungszustandes. Man ersieht aus Abb. 4 c, daß durch die isotropen Punkte drei Hauptlinien hindurchlaufen, die einander nicht orthogonal schneiden. Hier ist der Anriß nicht mehr aus dem theoretisch bestimmten Hauptspannungsfeld des ebenen Verzerrungszustandes zu verstehen, da außerdem die maximale Zugspannung endlich ist. Man erhält für den größten Wert der tangentialen Randspannung des Hauptspannungsfeldes des ebenen Verzerrungszustandes den Betrag von 2 kg/mm^2 .

Der Anriß bildet sich hierbei erst im Laufe eines oder auch mehrerer Tage nach Herausnahme der gekitteten Scheibe aus dem Ofen. Die Projektion seines Verlaufes auf den Querschnittskreis deckt sich bei visueller Beobachtung mit dem Stück der Hauptlinie in der Umgebung der Endpunkte A oder B. Er erfolgt senkrecht zur

Hauptzugrichtung. Diese Beobachtung bestätigt wieder, daß die maximale Normalspannung für die Orientierung der Bruchoberfläche spröder Körper entscheidend ist. Dagegen widerspricht dieser Theorie die Richtung des Rißverlaufes in den Endpunkten A oder B der Hauptlinie, da dort die Richtung der Hauptspannung zur Hauptlinie nicht orthogonal ist. Die Projektionen der Flächen der Reißenden auf dem Querschnitt zeigen also in ihren Rändern bei A oder B singuläres Verhalten.

Es liegt nahe, die Gültigkeit des Gesetzes der kritischen Normalspannungen bei der Reißentstehung auch in einer Scheibe vorauszusetzen, die aus zwei Halbkreisen gebildet wird. Nimmt man dazu mit SMEKAL an, daß an der Mantelfläche der Scheibe sehr kleine Spalte vorhanden sind, oder während des Alterns ausgebildet werden, so lernt man die an den isotropen Stellen bei A oder B im Großen auftretenden Abweichungen vom Gesetz der maximalen Normalspannung verstehen infolge der Gültigkeit dieses Gesetzes im Kleinen. Dazu muß die Richtigkeit des Überlagerungsprinzips zweier verschiedener ebener Verzerrungszustände vorausgesetzt werden.

Im Falle der selbstgespannten Kreisscheibe tritt nämlich bei ungleicher Unterteilung des Querschnittes theoretisch immer eine Unendlichkeitsstelle in der tangentialen Randspannung des ebenen Verzerrungszustandes auf, wie klein auch die Fläche des Segmentes II gewählt werden möge. Denkt man sich dem bestehenden ein solches Spannungsfeld superponiert, so entwickelt sich unter Einwirkung des makroskopischen Eigenspannungsfeldes innerhalb einer endlichen Zeit der Riß zum makroskopisch sichtbaren Bruch.

Das vorgeführte Modell einer Distorsion von Somigliana in spröden Körpern erlaubt Spannungsfelder zu approximieren, die an wohldefinierten Stellen der Mantelflächen von Scheiben kreisförmigen Querschnittes ausgesprochen hohe Randspannungen erzeugen im Gegensatz zu den unendlich vieldeutigen Verhältnissen beim einfachen Zugversuch unter äußerer Last.

Die Untersuchungen der Reißentwicklung nach erfolgtem Anriß auf die Gültigkeit des Gesetzes ist in Bearbeitung. Sie erfolgt wegen der außerordentlich kleinen Bruchausbreitungsgeschwindigkeit so, daß die durchlaufenen Nachbarzustände als aufeinander folgende Gleichgewichtszustände aufgefaßt werden.

Die Reißbildung in Scheiben mit Eigenspannungenergie gestattet prinzipiell die Werte der Oberflächenenergie allein mit den Hilfsmitteln der Elastizitätstheorie zu bestimmen. Sie ist gleich der Differenz der Energieinhalte vor und nach der Reißbildung der aus den Halbkreisen gebildeten Scheibe. Denn in diesem Fall wird man die zusätzlich freigesetzte Schall- und Wärmeenergie am ehesten vernachlässigen können. Leider ist der damit verbundene Rechenaufwand sehr groß.

³ A. SMEKAL, Naturwiss. 1922.